

Elementi di Dinamica dei Fluidi

G.Falqui,

Dipartimento di Matematica e Applicazioni,
Università di Milano–Bicocca.

Corso di Sistemi Dinamici e Meccanica Classica, a.a. 2010/2011.

Prima versione, Aprile 2011.

Commenti e correzioni sono benvenuti.

Queste note, delle quali sottolineo il carattere *estremamente* preliminare, riportano il contenuto delle lezioni sulla dinamica dei fluidi tenute nell’ultima parte del corso. A breve una versione corretta.

Contents

1	Introduzione	2
1.1	Equazione di continuità	3
1.2	Fluidi: Descrizione Lagrangiana ed Euleriana	5
2	Forze agenti e Tensore degli sforzi	7
3	Il flusso dell’acqua non viscosa	12
3.1	Fluidi ideali incomprimibili. Proprietà notevoli	13
3.2	Linee di flusso	17
3.2.1	Alcuni esempi elementari	18
3.3	Fluido perfetto piano con ostacolo circolare	19
3.4	Equazioni di Helmholtz per un fluido incompressibile	23
4	Fluidi viscosi ”Newtoniani”	25
4.1	Fluidi viscosi e l’equazione di Navier-Stokes.	26
4.2	Scaling e il numero di Reynolds	27
5	Alcuni Esempi	28
5.1	Piccole oscillazioni di un gas perfetto	28
5.2	Onde lineari di gravità	33

1 Introduzione

La dinamica dei fluidi è la branca della meccanica classica che studia il comportamento della materia nel suo stato fluido, ovvero nello stato in cui le forze intermolecolari non sono così intense, come nel caso dei solidi, a fare sì che gli atomi abbiano una disposizione sostanzialmente rigida, ma sufficienti a fare sì che la materia si presenti come un continuo (in termini intuitivi, un fluido assume la forma del recipiente). La trattazione si basa sulla cosiddetta *ipotesi del continuo* che si può formulare nel seguente modo. La configurazione al tempo t_0 di un sistema di N punti materiali – rispetto, diciamo, ad un osservatore possibilmente inerziale – è data dalla assegnazione di N vettori $\mathbf{x}_0^i, i = 1, \dots, N$, e la sua evoluzione temporale sarà nota una volta note le N funzioni vettoriali

$$\mathbf{x}^i(t), i = 1, \dots, N.$$

Nel caso di un corpo esteso l'ipotesi del continuo afferma che, in prima istanza, la configurazione al tempo $t = t_0$ del sistema sia parametrizzata dai punti di un aperto $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{R}^3$, e dunque che l'evoluzione temporale sia data da una funzione

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathbf{x}_0, t) &\mapsto \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

In altre parole, una volta nota la configurazione iniziale \mathbf{x}_0 , la configurazione del sistema al tempo $t = \bar{t}$ sarà data dalla funzione $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \bar{t})$; visto in un altro modo, per ogni $\bar{\mathbf{x}}_0$ fissato, la mappa

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}_0, t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

fornisce l'evoluzione temporale del "punto" del sistema che si trova, per $t = t_0$ in $\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}}_0$. Tale mappa verrà supposta sufficientemente liscia (cioè di classe almeno \mathcal{C}^2).

Osserviamo che questo è vero anche nel caso, che abbiamo trattato in precedenza, dei sistemi rigidi continui. In tale caso, però, la condizione di rigidità permette di trattare il sistema attraverso un sistema equivalente ad un numero finito (in particolare, $n = 6$ di gradi di libertà. Nel caso di fluidi (o, in generale, di continui deformabili, per i quali non vale il vincolo di rigidità) ciò non sarà più vero.

Il concetto di "punto" di un sistema continuo è, ovviamente, una astrazione. È infatti noto (cioè sperimentalmente verificato) che la struttura di ogni corpo fisico è atomica, ovvero granulare. Per esempio, il concetto di densità di un corpo, intesa intuitivamente come

$$\varrho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{m(\Delta V)}{\Delta V}, \quad (1.3)$$

dove $m(\Delta V)$ è la quantità di massa presente in un volume ΔV "centrato" in \mathbf{x} perde di significato quando il volume di ΔV scende al disotto di L^3 , dove L è una lunghezza critica stimabile intorno a $L = 10^{-5} \text{ cm}$, ovvero dove la natura atomica della materia si fa sentire. Peraltro, se si discutono fenomeni in cui le distanze ed i volumi in gioco sono di ordini di grandezza superiori a quelli critici, è ragionevole parametrizzare il sistema con grandezze continue. Per esempio, per discutere il passaggio di un flusso d'acqua attraverso una canna di diametro dell'ordine di qualche centimetro, o discutere di moti ondosi in un fiume, l'ipotesi del continuo è sicuramente valida.

Per finire questa breve introduzione, osserviamo quanto segue. Nell'ipotesi del continuo, per quello che riguarda lo "spazio dei parametri", non c'è distinzione tra un continuo solido deformabile (per esempio una trave di metallo di un ponte) ed una massa d'acqua. Quello che ne distingue la teoria sono le grandezze oggetto dello studio. Nel caso di solidi deformabili, saremo interessati allo studio delle "deformazioni", ovvero allo scostamento elastico dalle posizioni di equilibrio – pensiamo ad esempio alla flessione della nostra sbarra una volta che sia sollecitata dal passaggio di masse sopra di esse. Nel caso – cui ci atterremo – dei fluidi, saremo interessati a descriverne la dinamica, attraverso la descrizione del campo di velocità.

In maniera più formale, il concetto di fluido si formalizza come quello di un sistema continuo in cui le forze "intermolecolari" non possono equilibrare in condizioni statiche sforzi di "taglio", ovvero paralleli alla giacitura della porzione di fluido. Ad esempio, se è possibile l'equilibrio statico di un fluido (acqua) in un recipiente, esso avviene quando la superficie del fluido è orizzontale; se incliniamo il recipiente, la superficie del fluido si muoverà.

1.1 Equazione di continuità

L'equazione di continuità traduce il principio di conservazione della massa, intesa come quantità di materia. Supponiamo che al tempo t , il fluido occupi il volume \mathcal{V} , e consideriamo un sottoinsieme (aperto) $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$ la cui frontiera

viene denotata con $\partial\mathcal{C}$. La quantità di fluido (la massa del fluido) presente in \mathcal{C} al tempo t sarà data dall'integrale:

$$m(t)_\mathcal{C} = \int_{\mathcal{C}} \varrho(\mathbf{x}, t) dV.$$

Supponiamo che la porzione \mathcal{C} sia fissa nel tempo; allora, in assenza di sorgenti di materia, la variazione della massa contenuta in \mathcal{C} nell'unità di tempo, ovvero

$$\frac{d}{dt}m(t)_\mathcal{C}$$

dovrà eguagliare la quantità di massa che entra attraverso la frontiera $\partial\mathcal{C}$ in \mathcal{C} , che è data dall'integrale di superficie

$$\int_{\partial\mathcal{C}} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{(i)} dA$$

dove con $\mathbf{n}^{(i)}$ abbiamo denotato la normale alla superficie $\partial\mathcal{C}$ (nel punto \mathbf{x}) orientata verso l'interno. Dunque si avrà la relazione

$$\frac{d}{dt}m(t)_\mathcal{C} = \int_{\partial\mathcal{C}} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{(i)} dA, \quad (1.4)$$

e dunque

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}m(t)_\mathcal{C} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{C}} \varrho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial}{\partial t} \varrho(\mathbf{x}, t) dV = \\ &= \int_{\partial\mathcal{C}} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{(i)} dA = - \int_{\mathcal{C}} \nabla \cdot (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}) dV, \end{aligned} \quad (1.5)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il teorema di Gauss (o della divergenza) tenendo conto del fatto che quest'ultimo contempla la normale a;;a superficie diretta verso *l'esterno*. Questa relazione è la relazione di conservazione della massa in forma integrale. dato che deve valere – in assenza di sorgenti – per ogni porzione \mathcal{C} di fluido, la equazione (1.5) dà luogo all'equazione di conservazione della massa in forma differenziale

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot (\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (1.6)$$

1.2 Fluidi: Descrizione Lagrangiana ed Euleriana

Per quanto detto prima, ad un punto del fluido che al tempo $t = t_0$ si trovi in $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ possiamo associare una densità dimassa

$$\varrho(\mathbf{x}_0, t_0) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0, \Delta V \gg L^3} \frac{m(\Delta V)}{\Delta V}, \quad (1.7)$$

e la sua evoluzione sarà data dalla funzione, introdotta in (1.1) $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ con $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{V}_0$ e $t \in \mathbb{R}$ (o, più "modestamente", $t \in (T_1, T_2)$ con $t_0 \in (T_1, T_2)$), ovvero dall'insieme delle curve $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t), t \in (T_1, T_2)$. Questo tipo di descrizione è detta *Lagrangiana*. Per introdurre la descrizione *Euleriana* del moto, partiamo dalla curva

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$$

che possiamo pensare come la linea di universo di un punto materiale di massa $\varrho(\mathbf{x}_0, t_0)$ e volume unitario, che si trova, a $t = t_0$ nel punto \mathbf{x}_0 . La velocità di questo "punto materiale equivalente" sarà data, per $t \in (T_1, T_2)$ da

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)). \quad (1.8)$$

In altre parole, $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)$ non è altro che il vettore tangente alla curva $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$. In maniera analoga potremo trovare l'accelerazione del "punto materiale equivalente" come

$$a(\mathbf{x}_0, t) = \frac{d}{dt}\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t). \quad (1.9)$$

Consideriamo ora $t \in (T_1, T_2)$, e l'insieme \mathcal{V}_t dato dalla immagine $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ dei punti del fluido presi allo stesso tempo t (In questo senso, possiamo pensare che $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_{t_0}$). Supporremo questa applicazione $\varphi : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}_t$ sia, per ogni t fissato invertibile, cioè che

$$\det \left(\frac{\partial \mathbf{x}^i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0^j} \right) \neq 0 \quad \forall t \in (T_1, T_2). \quad (1.10)$$

Sarà dunque possibile invertire la mappa φ ed ottenere, sempre $\forall t \in (T_1, T_2)$ fissato,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t). \quad (1.11)$$

Sostituendo questa relazione nella (1.8) otteniamo la velocità in funzione di t e del punto \mathbf{x} generico, ovvero

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (1.12)$$

Il significato di questo "cambio" di variabili è profondo. Infatti, assegnare (o studiare) $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ significa assegnare il campo di velocità: a parole, la quantità $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)$ descrive la velocità della particella che al tempo t_0 stava in \mathbf{x}_0 , mentre il campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ descrive la velocità della particella che al tempo t passa per il punto \mathbf{x} . Dunque, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ descrive il campo vettoriale delle velocità, mentre $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t)$ descrive, in qualche modo, la "storia" delle "particelle di fluido". La descrizione del moto attraverso la il campo delle velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ si chiama descrizione *Euleriana*.

La descrizione Lagrangiana del moto, che parametrizza gli elementi del fluido con le posizione iniziali può risultare conveniente nella derivazione delle leggi fondamentali. Per esempio, la legge di conservazione del momento e/o dell'energia sono sicuramente vere qualora applicate alla *stessa* porzione di materia considerata nella sua evoluzione temporale. Peraltro, la descrizione del fluido attraverso la descrizione (le "coordinate") euleriana è più utile ai fini "pratici", in quanto fornisce direttamente delle equazioni per il campo di velocità.

Osserviamo che la sostituzione (1.11) può essere effettuata anche per altre grandezze. In particolare, $\varrho(\mathbf{x}, t)$ dà la densità di massa per la "porzione infinitesima" di fluido che si trova in \mathbf{x} al tempo t . In questo senso, $\varrho(\mathbf{x}, t)$ è un campo *scalare* su \mathbb{R}^3 (dipendente – eventualmente – dal tempo t).

Assegnati $\varrho(\mathbf{x}, t)$, e il campo di velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ possiamo definire altre grandezze meccaniche "intensive", cioè relative ad elementi infinitesimi di fluido. Ad esempio, il momento angolare rispetto ad un punto \mathbf{y} sarà dato da

$$L_{\mathbf{y}} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \wedge \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

e così via. È importante notare che, se $G(\mathbf{x}, t)$ è una tale grandezza, nella sua variazione rispetto al tempo si hanno, nella descrizione euleriana, due termini; ovvero

$$\frac{d}{dt}G(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{G}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial G}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}, \quad (1.13)$$

dove il primo termine tiene conto della dipendenza esplicita di G da t , mentre il secondo nasce dal fatto che, nella descrizione Euleriana del fluido, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, e dunque nella derivata temporale della grandezza G si deve tenere conto anche di tale dipendenza. Osserviamo che, simbolicamente possiamo

scrivere la relazione (1.13) come

$$\frac{d}{dt}G(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla G. \quad (1.14)$$

In fluidodinamica, si usa chiamare l'operatore

$$\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

che non è altro che la somma della derivata parziale rispetto a t più la derivata di Lie ripeto al campo vettoriale delle velocità, come derivata Euleriana o comoviente¹.

2 Forze agenti e Tensore degli sforzi

Per descrivere la dinamica del fluido che stiamo esaminando supporremo di poter dividere le forze agenti sugli "elementi di fluido" in due classi:

1. Forze di massa o di volume.
2. Forze di superficie.

La prima categoria di forze è quella più semplice da descrivere: si tratta di forze intensive, che agiscono su ogni elemento del fluido. L'esempio principe è quello della forza di gravità: su un elemento $\delta m = \varrho dV$ di un fluido posto sulla superficie della terra (o nelle immediate vicinanze della stessa) agirà la forza di gravità

$$\delta \mathbf{f}_g = \delta m \mathbf{g} = \varrho \mathbf{g} dV,$$

e dunque sulla porzione finita \mathcal{C} di fluido avremo l'azione della forza gravitazionale

$$\mathbf{F}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g} dV. \quad (2.1)$$

In generale, useremo la nozione di densità di forza \mathbf{f} per unità di *massa*, e dunque la forza di volume totale agente sulla porzione di fluido \mathcal{C} sarà scritta in generale simbolicamente come

$$\mathbf{F}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f} dV. \quad (2.2)$$

¹Con una "emme" sola.....

La seconda categoria di forze è quella più delicata; essa tiene conto delle forze di interazione (anche di viscosità) "a corto raggio" che si esercitano tra elementi di fluido contigui, che possiamo pensare agenti attraverso la superficie di separazione. È ovvio che per dare una descrizione di tali forze a partire da principi primi si dovrebbe studiare in dettaglio la natura microscopica delle interazioni (di natura elettromagnetica) tra le molecole del fluido. Peraltro, questo non rientra negli scopi della fluidodinamica macroscopica, che si limita a dare una descrizione fenomenologica di tali forze, e fa uso di opportune ipotesi semplificatrici (la prima fra le quali, appunto l'idea che tali forze possano essere descritte come interazioni di superficie).

L'ipotesi cruciale è quella di linearità rispetto alla giacitura della superficie. Essa si formula matematicamente nel seguente modo. Sia \mathcal{C} la porzione di fluido in questione, sia \mathbf{x} un punto della sua frontiera (o bordo, o superficie) $\partial\mathcal{C}$, e sia $\mathbf{n}^{(I)}$ la normale a $\partial\mathcal{C}$ in \mathbf{x} , orientata verso l'interno di \mathcal{C} . L'ipotesi di linearità dice che, se $\delta\Phi$ è la forza di superficie esercitata (dal resto del fluido) su \mathcal{C} sull'elemento di area dA in \mathbf{x} , allora $\delta\Phi$ dipende linearmente dall'elemento d'area orientato $\mathbf{n}^{(I)}dA$. Ovvero, scritti i vettori $\delta\Phi = \delta\Phi_i e^i$ e $\mathbf{n}^{(I)} = n^k e_k$ rispetto ad una base cartesiana ortogonale, deve esistere un tensore a due indici $\mathbb{S} = S_{ik} e^i \otimes e^k$ attraverso il quale la forza di contatto si possa esprimere come

$$\delta\Phi_i = S_{k,i} n^k dA. \quad (2.3)$$

Tale tensore si chiama *Tensore degli sforzi*.

Osservazione. L'ipotesi di poter scrivere le forze superficiali secondo la (2.3) è sicuramente semplificativa, ma ben verificata in natura. Si noti che l'ipotesi di linearità rispetto al versore normale fa sì che il terzo principio di Newton – quello di azione e reazione – sia automaticamente verificato. Inoltre, vale anche il principio di sovrapposizione: se immaginiamo di scomporre la porzione \mathcal{C} di fluido come $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, con $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \mathcal{S}$, dove \mathcal{S} è una superficie bidimensionale, vediamo che le forze superficiali agenti tra \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 si annullano, dato che sono, per ogni elemento di superficie $\delta\Sigma \subset \mathcal{S}$ uguali ed opposte.

Fatte queste premesse, l'implementazione del secondo principio di Newton procede nel seguente modo. Consideriamo un parzione di fluido \mathcal{C} , immaginata come "scomposta" in elementi infinitesimi di fluido $\delta m = \rho dV$, scriviamo le equazioni di Newton per δm ed integriamo.

Chiamando $\mathbf{S}_n^{(I)} = S_{ik} n^i e^k$ otteniamo

$$\int_C \varrho \mathbf{a} dV = \int_C \varrho \mathbf{f} dV + \int_{\partial C} \mathbf{S}_n^{(I)} d\sigma. \quad (2.4)$$

Usando il teorema della divergenza², possiamo trasformare il secondo integrale del membro a destra di questa equazione in un integrale di volume, come

$$\int_{\partial C} \mathbf{S}_n^{(I)} d\sigma = - \int_C \nabla \cdot \mathbf{S}_n^{(I)} dV, \quad (2.5)$$

dove $\nabla \cdot \mathbf{S}_n^{(I)}$ è il vettore che sulla base e^k si scrive come $\nabla \cdot \mathbf{S}_n^{(I)} = \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} S_{ik} e^k$ e dunque riscrivere la (2.5) come

$$\int_C \varrho \mathbf{a} dV = \int_C (\varrho \mathbf{f} dV - \nabla \cdot \mathbf{S}_n^{(I)}) dV. \quad (2.6)$$

Dato che questa relazione deve valere per ogni porzione \mathcal{C} del fluido, gli integrandi devono essere uguali, e dunque otteniamo la forma differenziale delle equazioni di Newton per i fluidi come, simbolicamente,

$$\varrho \mathbf{a} = \varrho \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{S}_n^{(I)}, \quad (2.7)$$

o, meglio, scrivendo tutto in componenti,

$$\varrho a_k = \varrho f_k - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} S_{ik}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.8)$$

Possiamo utilizzare la versione opportuna della seconda equazione cardinale della dinamica per ottenere una (importante) informazione sul tensore degli sforzi \mathbb{S} .

Consideriamo una porzione di fluido \mathcal{C}_{12} compresa tra due sfere Σ_1, Σ_2 di raggio $R_1 \gtrsim R_2$, e calcoliamo il momento delle forze agenti su di essa, prendendo il prodotto vettore di \mathbf{r} con l'espressione delle forze, ne otteniamo

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_{12}} = \int_{\mathcal{C}_{12}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{f}) dV + \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_n^{(I_1)} d\sigma + \int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_n^{(I_2)} d\sigma; \quad (2.9)$$

²Attenzione: è una ugualglianza vettoriale, quindi si userà il teorema della divergenza componente per componente...

Questa espressione dovrà eguagliare l'integrale del prodotto vettore di \mathbf{r} con l'accelerazione, cioè dovrà valere

$$\mathbf{M}_{\mathcal{C}_{12}} = \int_{\mathcal{C}_{12}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{a}) dV.$$

Se ora consideriamo una terza sfera di raggio $R_3 \lesssim R_2$, e la porzione \mathcal{C}_{13} di fluido compresa tra R_3 e R_1 , otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{13}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{a}) dV &= \int_{\mathcal{C}_{12}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{a}) dV + \int_{\mathcal{C}_{23}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{a}) dV = \\ &= \int_{\mathcal{C}_{12}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{f}) dV + \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I_1)} d\sigma + \boxed{\int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I_2)} d\sigma} + \\ &= \int_{\mathcal{C}_{23}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{f}) dV + \boxed{\int_{\Sigma_2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I_2)} d\sigma} + \int_{\Sigma_3} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I_3)} d\sigma = \\ &= \int_{\mathcal{C}_{13}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{f}) dV + \int_{\Sigma_1} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I_1)} d\sigma + \int_{\Sigma_3} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I_3)} d\sigma \end{aligned} \quad (2.10)$$

dove abbiamo, usato il fatto che per la superficie Σ_2 che separa \mathcal{C}_{12} e \mathcal{C}_{23} , i momenti delle forze si annullano dato che le normali rivolte verso l'interno – che definiscono gli integrali di superficie – sono, in ogni punto, una l'opposta dell'altra. Più esplicitamente, i due termini evidenziati nella catena di equazioni sopra, si elidono; infatti, nel primo integrale, \mathbf{n}^{I_2} è la normale a Σ_2 , rivolta verso l'interno di \mathcal{C}_{12} , mentre nel secondo integrale è rivolta verso l'interno di \mathcal{C}_{23} . Osserviamo che qui l'ipotesi di linearità delle forze di superficie rispetto alla normale gioca un ruolo cruciale.

Dunque possiamo concludere che per ogni porzione di fluido \mathcal{C} deve valere la relazione

$$\int_{\mathcal{C}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{a}) dV = \int_{\mathcal{C}} (\mathbf{r} \wedge \varrho \mathbf{f}) dV + \int_{\partial \mathcal{C}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I)} d\sigma. \quad (2.11)$$

A questo punto possiamo procedere con alcune manipolazioni formali su queste equazioni. Dal teorema della divergenza abbiamo che (avendo scritto $\mathbf{r} = \sum_j x_j \mathbf{e}_j$)

$$\int_{\partial \mathcal{C}} \mathbf{r} \wedge \mathbf{S}_{\mathbf{n}}^{(I)} d\sigma = - \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{r} \wedge S_{ik} e^k) \right) dV.$$

Ora, dato che $\mathbf{r} = x_l e^l$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{r} \wedge S_{ik} e^k) = \sum_l \delta_{il} e^l \wedge S_{ik} e^k + \mathbf{r} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} S_{ik} e^k = S_{ik} e^i \wedge e^k + \mathbf{r} \wedge \frac{\partial}{\partial x^i} S_{ik} e^k. \quad (2.12)$$

Portando a sinistra il termine di forza di volume ed il termine corrispondente al secondo addendo di quest'ultima relazione otteniamo

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\mathbf{r} \wedge (\varrho \mathbf{a} - \varrho \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial x^i} S_{ik} e^k) \right) dV = - \int_{\mathcal{C}} (S_{ik} e^i \wedge e^k) dV. \quad (2.13)$$

Ma, per l'equazione (2.7) il termine $\varrho \mathbf{a} - \varrho \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial x^i} S_{ik} e^k$ si annulla, e così il lato destro di questa relazione. Dunque otteniamo che

$$\int_{\mathcal{C}} (S_{ik} e^i \wedge e^k) dV = 0, \quad \text{per ogni volume } \mathcal{C},$$

e dunque $S_{ik} e^i \wedge e^k = 0$ e cioè la relazione

$$S_{ik} = S_{ki}, \quad (2.14)$$

ovvero che il tensore degli sforzi è un tensore simmetrico, e dunque ha solo 6 componenti indipendenti.

A questo punto siamo arrivati alla seguente rappresentazione. Per descrivere il moto – e le grandezze meccaniche – del sistema, abbiamo sicuramente bisogno (indipendentemente dal tipo di rappresentazione, Lagrangiana o Euleriana) della densità ϱ e della velocità \mathbf{v} ; supposte note le forze di volume \mathbf{f} , abbiamo visto che nella descrizione macroscopica del fluido dobbiamo introdurre il tensore degli sforzi \mathbb{S} , che è un tensore 3×3 simmetrico; il tutto dà luogo a *dieci* variabili dipendenti; queste sono legate dall'equazione di continuità (1.6) e dalla equazione di Newton (2.7). Scritte nella rappresentazione Euleriana (e in componenti), queste equazioni danno luogo al sistema fondamentale

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\partial}{\partial x^i} \varrho v^i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v^k + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} v^k = f^k - \frac{1}{\varrho} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} S_{ik} \right), \quad k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (2.15)$$

Questo è un sistema di 4 equazioni alle derivate parziali in 10 variabili dipendenti, ed è detto perciò *indeterminato* o *aperto*. Per scrivere un sistema *determinato* o *chiuso* dovremo fare ulteriori ipotesi strutturali sul tensore degli sforzi \mathbb{S} .

3 Il flusso dell'acqua non viscosa

Prima di discutere più in dettaglio la struttura del tensore degli sforzi, è opportuno identificarne una "componente" fondamentale, che si può desumere anche da considerazioni di idrostatica.

Consideriamo un volumetto ΔV (un parallelepipedo) di fluido di lati $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, e consideriamo una situazione in cui il fluido sia statico (cioè il fluido sia in quiete). L'interazione tra ΔV e il "resto" del fluido sarà compendiata, nel nostro schema, da forze di tipo superficiale; dato che il fluido non può sopportare staticamente alcuno sforzo di taglio, la forza che agisce su ogni faccia di ΔV deve essere (in ogni punto) diretta come la normale alla faccia. In particolare, se pensiamo a ΔV come al parallelepipedo

$$\Delta V = (x, x + \Delta x) \times (y, y + \Delta y) \times (z, z + \Delta z)$$

la componente della forza lungo, e.g., l'asse z sarà data da

$$f_z^{sup} = \int_{\Sigma_-} p dA - \int_{\Sigma_+} p dA,$$

dove p è la pressione, ed abbiamo scelto il segno in modo tale che essa (come da convenzione solita) sia positiva qualora diretta verso l'interno di ΔV . Considerando ΔV piccolo, si ha

$$f_z^{sup} \simeq \int_{\Sigma_-} (p(x, y, z) - p(x, y, z + \Delta z)) dA \simeq -\frac{\partial p}{\partial z} dV,$$

e dunque la componente z dell'intensità delle forze superficiali in situazione statica potrà scriversi come $\frac{\partial p}{\partial z}$. Ragionando nello stesso modo, otteniamo che l'equazione (2.15) si potrà scrivere

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\partial}{\partial x^i} \varrho v^i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v^k + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} v^k = f^k - \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial p}{\partial z^k} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \tilde{S}_{ik} \right), \quad k = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $\tilde{S}_{i,k}$ rappresenta il tensore degli sforzi *dinamico*, ovvero che si annulla quando il fluido è statico. Notiamo che il termine di pressione è compatibile con il terzo principio di Newton; se scriviamo

$$S_{ik} = \tilde{S}_{ik} + p \delta_{ik},$$

notiamo che S_{ik} è simmetrico se e solo se lo è \tilde{S}_{ik} , e sostituendo questa equazione in (2.15), otteniamo proprio la (3.1).

Nota: L'argomento che abbiamo presentato qui è un po' euristico ("alla fisico"). Peraltro, utilizzando il teorema della media, la derivazione dell'espressione della forza dovuta alla pressione può essere resa matematicamente più "elegante", con poche e naturali ipotesi sulla regolarità di p .

Esercizio: Rendere più elegante la derivazione di cui sopra utilizzando il teorema della media per funzioni di più variabili, che dice che se $f(x_1, \dots, x_n)$ è continua in un dominio \mathcal{D} a chiusura $\bar{\mathcal{D}}$ compatta (e di volume non nullo....), allora esiste (almeno) un punto $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathcal{D}$ per cui vale che

$$\int_{\mathcal{D}} f(x_1, \dots, x_n) d^n x = \text{Vol}(\mathcal{D}) f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

3.1 Fluidi ideali incomprimibili. Proprietà notevoli

Consideriamo dapprima il caso in cui il tensore degli sforzi dinamici si annulli identicamente, ovvero il caso in cui $\tilde{S}_{i,k} \equiv 0$, ovvero le interazioni superficiali tra gli elementi del fluido siano solo date dalla pressione. In particolare, in questo caso gli sforzi di taglio saranno nulli, e dunque singoli strati di fluido potranno scorrere liberamente l'uno sull'altro. Il nome acqua "secca" (o "asciutta")³ si riferisce a questo fenomeno (un nome più "aulico" per questa situazione è fluido ideale). Questo significa che differenti strati di un fluido che scorrano, e.g., nella direzione dell'asse delle x , non potranno scambiarsi componente x del momento. In effetti, questa ipotesi è più appropriata per un gas a pressione "standard" piuttosto che per un liquido.

Questa ipotesi permette di scrivere (3.1) come

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\partial}{\partial x^i} \varrho v^i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v^k + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} v^k = f^k - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x^k}, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3.2)$$

Anche in questo caso il sistema è sottodeterminato, e va complementato con un'altra equazione. Spesso, sulla scorta della termodinamica, si supplementa il sistema con una equazione di stato della forma $\varrho = \varrho(p)$, e si parla di fluido barotropico. In particolare, ci concentreremo sul caso del fluido "secco"

³Mutuato, *si parva licet* dal Feynman, che chiama "acqua bagnata" il caso del fluido viscoso

incomprimibile (o, come si dice con un inglesismo, incompressibile), definito da

$$\varrho(x, y, z, t) = \varrho_0(\text{costante}). \quad (3.3)$$

In questo caso, si osserva che la prima equazione del sistema 3.2 diventa semplicemente $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, ed il sistema ridotto diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^i} v^i = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} v^k + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} v^k = \Phi^k - \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial x^k}, \quad k = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (3.4)$$

dove con Φ^k abbiamo denotato la terna dell'intensità di forza per unità di massa. Osserviamo che questa ridefinizione è possibile anche per fluidi con densità arbitraria.

È possibile porre quest'ultimo sistema in una forma particolarmente utile per ulteriori considerazioni, sfruttando il seguente Lemma di calcolo vettoriale.

Lemma 3.1 *Dato un campo vettoriale $\mathbf{v}(x, y, z)$ (sufficientemente regolare) definito in (un aperto di) \mathbb{R}^3 vale la relazione*

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{v}|^2). \quad (3.5)$$

Dimostrazione. Il Lemma discende dalla identità più generale

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} - (\nabla \wedge \mathbf{w}) \wedge \mathbf{v}, \quad (3.6)$$

valida per ogni coppia di campi vettoriali (\mathbf{v}, \mathbf{w}) (sufficientemente regolari) definiti in (un aperto di) \mathbb{R}^3 , la cui verifica è un esercizio che si basa sulle proprietà del prodotto vettore – e dunque, del simbolo di Levi Civita ϵ_{ijk} che viene lasciato allo studente.

Grazie al Lemma 3.5 possiamo scrivere le equazioni di Eulero per un fluido incomprimibile come

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{v}|^2) = -\nabla \left(\frac{p}{\varrho_0} + U \right) \end{cases} \quad (3.7)$$

dove con U abbiamo denotato il potenziale (supponendo che esista!) della densità di massa delle forze di volume, ovvero $\Phi_k = -\partial_k U$.

Introducendo il *campo di vorticità* $\boldsymbol{\omega}$ definito da

$$\boldsymbol{\omega} = (\nabla \wedge \mathbf{v}), \quad (3.8)$$

la (3.7) diventa

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{v}|^2) = -\nabla \left(\frac{p}{\varrho_0} + U \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

Dunque, prendendo il prodotto scalare della seconda equazione con il campo stesso di velocità \mathbf{v} otteniamo

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \left(= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\varrho_0} + U \right)$$

Consideriamo il caso *stazionario*, ovvero quello in cui le grandezze - e, in particolare, il campo di velocità - non dipendono *esplicitamente* da t^4 . Allora il lato sinistro di questa equazione si annulla e si ha il

Teorema 3.2 (*Di Bernoulli*) *La quantità*

$$\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\varrho_0} + U \quad (3.10)$$

è conservata lungo le linee di flusso, per un qualsiasi moto stazionario di un fluido perfetto.

Dimostrazione La dimostrazione del teorema consta nella spiegazione dei termini. L'abbiamo formulato così perché questa è la forma nella quale si trova sui testi *standard*. Di fatto, il teorema dice che, se supponiamo di conoscere $p = p(x, y, z)$, $U = U(x, y, z)$ come funzioni del posto, e consideriamo il campo vettoriale in \mathbb{R}^3 (o in un opportuno aperto Ω dello spazio Euclideo, la traduzione moderna dell'affermazione di Bernoulli è semplicemente che la quantità (3.10) è una costante del moto, ovvero la sua derivata di Lie rispetto al campo vettoriale *autonomo* $mbv(x, y, z)$ si annulla. Nella rappresentazione della teoria dei sistemi dinamici, sappiamo che, in generale, il valore della costante del moto dipende dal dato iniziale, ovvero dalla curva

⁴Notiamo che il caso stazionario non deve essere confuso con il caso statico. In quest'ultimo caso $\mathbf{v} \equiv 0$, mentre nel caso stazionario, è la derivata parziale del campo di velocità \mathbf{v} rispetto al tempo che si annulla.

integrale del campo che definisce il sistema dinamico. Questa osservazione è di solito riportata nella letteratura classica come

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\varrho_0} + U \Big|_{\text{linea di flusso}}$$

per sottolineare, appunto che il valore di questa costante dipende dalla linea di flusso (*streamline*, in inglese). Peraltro, possiamo osservare che, se il campo di velocità non è vorticoso (ovvero $\boldsymbol{\omega} = 0$) la costante non dipende nemmeno dalla linea di flusso. Si osservi, peraltro, che evidentemente il teorema di Bernoulli è evidentemente, un teorema di conservazione dell'energia (o meglio, della densità di energia).

Il teorema di Bernoulli può essere, senza difficoltà particolari, esteso a fluidi perfetti *bariotropici*, sempre nel caso stazionario. Infatti, se riconsideriamo l'equazione di Eulero per il fluido perfetto, abbiamo che, sempre con la nostra formula preferita del calcolo vettoriale, essa si può scrivere (anche nel caso di un fluido comprimibile) come

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{v}|^2) = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - \nabla U$$

dato che per un fluido barotropico possiamo esprimere $\varrho = \varrho(p)$, basta osservare che, detta \mathcal{P} la quantità

$$\mathcal{P}(p) = \int^p \frac{dp'}{\varrho(p')},$$

una diretta applicazione del teorema sulla derivazione delle funzioni composte dà luogo a

$$\nabla(\mathcal{P}) = \frac{\nabla p}{\varrho(p)}$$

e porta dunque alla

Proposizione 3.3 (*Teorema di Bernoulli 2 - il caso barotropico*): *In un fluido perfetto barotropico stazionario la quantità*

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \mathcal{P} + U$$

è conservata lungo le linee di flusso. Se il flusso è non vorticoso $\boldsymbol{\omega} (= \nabla \wedge \mathbf{v}) = -$, allora la costante in questione non dipende dalla linea di flusso.

3.2 Linee di flusso

A questo punto, è utile ricordare la definizione di linee di flusso di un campo vettoriale stazionario. Nei testi di fluidodinamica (e più in generale, di Fisica II), esse sono definite in questo modo:

Definizione 3.4 *Dato un campo vettoriale*

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))$$

si chiamano linee di flusso di \mathbf{E} le curve $(x(t), y(t), z(t)), t \in I$ il cui vettore tangente $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ sia, in ogni punto, diretto come il campo vettoriale assegnato. Esse soddisfano le equazioni differenziali

$$\frac{dx}{E_x(x, y, z)} = \frac{dy}{E_y(x, y, z)} = \frac{dz}{E_z(x, y, z)}. \quad (3.11)$$

Nel linguaggio della prima parte del corso, possiamo rifrasedare questa definizione nel seguente modo:

Proposizione 3.5 *Le linee di flusso di \mathbf{E} sono le curve di fase (e/o, a meno di una riparametrizzazione, le traiettorie) del campo vettoriale \mathbf{E} .*

Dimostrazione. Basta riscrivere le (3.11) nel modo meno criptico

$$\frac{dx}{E_x(x, y, z)} = \frac{dy}{E_y(x, y, z)} = \frac{dz}{E_z(x, y, z)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{E_y(x, y, z)}{E_x(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{E_z(x, y, z)}{E_x(x, y, z)} \end{cases}$$

e osservare che le soluzioni del sistema dinamico

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = E_x(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = E_y(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = E_z(x, y, z) \end{cases}$$

soddisfano sicuramente l'equazione sopra; la condizione più debole di “proporzionalità” del vettore tangente alla linea di flusso (rispetto all'uguaglianza del vettore tangente alle soluzioni del sistema dinamico) è spiegata dal fatto che l'immagine di una curva in \mathbb{R}^3 è invariante per riparametrizzazioni $t = t(s)$.

3.2.1 Alcuni esempi elementari

La legge di Stevino. Consideriamo un fluido incompressibile $\varrho = \text{costante} = \bar{\varrho}$, in equilibrio statico nel campo gravitazionale $U = gz$ della superficie terrestre. All'equilibrio, $\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\omega} = 0$; la quantità conservata del teorema di Bernoulli non dipende dalla linea di flusso (in questo caso le linee di flusso degenerano nei punti del fluido, dato che il campo di velocità si annulla).

$$\frac{p}{\bar{\varrho}} + gz = \text{costante} = \frac{p_0}{\bar{\varrho}} + gz_0 \quad (p_0 = p|_{z=z_0}), \quad (3.12)$$

da cui la legge di Stevino

$$p = p_0 - \bar{\varrho} g (z - z_0). \quad (3.13)$$

In particolare si noti che si ritrova che la superficie del fluido è un piano orizzontale.

Isoterme di un gas perfetto Dalla legge dei gas perfetti $pV = nRT$, otteniamo, per una trasformazione isoterma, $pV = nR\bar{T} = \text{costante}$ da cui

$$\varrho = \alpha p, \quad \text{dove } \alpha = \bar{T}\bar{R}, \quad \bar{R} = M_0 R \quad (3.14)$$

(con M_0 si denota la massa molare, e R è il numero di Avogadro). Dunque, la quantità \mathcal{P} che compare nel Teorema di Bernoulli (versione 2), è data da

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\alpha} \int \frac{dp}{p} = \frac{1}{\alpha} \log \varrho$$

Sostituendo nel teorema di Bernoulli (posto $p_0 = p|_{z=0}$ si ha

$$\frac{1}{\alpha} \log p g z = \frac{1}{\alpha} \log p_0 \Rightarrow p = p_0 \exp(-\alpha g z).$$

Il serbatoio Supponiamo di avere un serbatoio di fluido incompressibile (acqua) che si svuota alla base, attraverso un foroi; per semplificare la situazione supporremo che il serbatoio, di altezza h , sia così ampio che:

- 1) la velocità del fluido a $z = h$ sia trascurabile;
 - 2) la variazione del livello del fluido sia anch'essa trascurabile.
- Vogliamo sapere la velocità di uscita del liquido.

Scriviamo la legge di conservazione di Bernoulli (ovviamente stiamo seguendo una linea di flusso che parte da $z = h$ e arriva al foro, posto a $z = 0$. si avrà (qui $v = |\mathbf{v}|$), per ogni coppia di valori z_1, z_2

$$\frac{v^2(z_2)}{2} + gz_2 + \frac{p(z_2)}{\bar{\rho}} = \frac{v^2(z_1)}{2} + gz_1 + \frac{p(z_1)}{\bar{\rho}}. \quad (3.15)$$

Ora, se $z_1 = h$ e z_2 corrisponde al foro, la pressione sarà sempre quella atmosferica, e dunque la relazione qui sopra si riduce a

$$\frac{v^2(z_2)}{2} + gz_2 = \frac{v^2(z_1)}{2} + gz_1,$$

mentre le due ipotesi semplificative di qui sopra danno $v(h) = 0$ e dunque per la velocità al foro

$$v(0) = \sqrt{2gh}$$

3.3 Fluido perfetto piano con ostacolo circolare

Riconsideriamo il caso di un fluido *perfetto* in moto stazionario, attorno ad un ostacolo cilindrico. Osserviamo che il problema si riconduce a quello di un moto nel piano. Le equazioni da considerare sono dunque le equazioni di Eulero (3.7); in particolare, considereremo il caso di un moto senza vorticità. In questo caso il problema si semplifica. Infatti, se supponiamo che il rapporto tra il raggio a dell'ostacolo e la larghezza L del canale sia piccolo, possiamo supporre che, dato che $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, valga - anche se il dominio che ci interessa non è semplicemente connesso, che il flusso sia "potenziale", ovvero che⁵

$$\mathbf{v} \equiv (v_x, v_y) = \nabla \psi \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (3.16)$$

Considerata l'equazione di incomprimibilità $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, abbiamo che ψ deve essere una funzione *armonica*, ovvero deve soddisfare l'equazione

$$\Delta \psi \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.17)$$

⁵A lezione avevo scelto il segno opposto per il potenziale.

La geometria del problema ci dice dunque che dobbiamo trovare una funzione armonica di due variabili, $\psi(x, y)$, definita per $x^2 + y^2 \geq a^2$ che soddisfi le seguenti condizioni (dette "al contorno"):

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \nabla\psi \rightarrow \mathbf{v}_0 \text{ per } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \text{ con } \mathbf{v}_0 = (v_0, 0). \\ \mathbf{v} = \nabla\psi \text{ sia tangente al cerchio di raggio } a \text{ per } x^2 + y^2 = a^2. \end{cases} \quad (3.18)$$

Osserviamo che la prima condizione dice che per punti sufficientemente lontani dall'ostacolo il flusso è imperturbato, mentre la seconda dice semplicemente che il fluido ("l'acqua") non penetra nell'ostacolo. La geometria del problema suggerisce - anche se non sarebbe strettamente necessario - di utilizzare coordinate polari (r, ϑ) nel piano. Detti \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_ϑ i versori corrispondenti, che sono correlati ai versori \mathbf{e}_x ed \mathbf{e}_y delle coordinate cartesiane da

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \vartheta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\vartheta = -\sin \vartheta \mathbf{e}_x + \cos \vartheta \mathbf{e}_y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{e}_x = \cos \vartheta \mathbf{e}_r - \sin \vartheta \mathbf{e}_\vartheta \\ \mathbf{e}_y = \sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta, \end{cases} \quad (3.19)$$

si hanno i seguenti risultati standard di analisi vettoriale:

$$\begin{aligned} \nabla\psi(r, \vartheta) &= \frac{\partial\psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta; \\ \Delta\psi(r, \vartheta) &= \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \vartheta^2}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dunque potremo riformulare il problema per il potenziale della velocità nel seguente modo:

Trovare una funzione $\psi(r, \vartheta)$, periodica in ϑ di periodo 2π , e definita per $r \geq a$ che soddisfi

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad r \geq a \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \quad r = a \\ \frac{\partial\psi}{\partial r} = v_0 \cos \vartheta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \vartheta} = -v_0 \sin \vartheta, \quad r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (3.21)$$

Per risolvere questo problema possiamo osservare che, dato che l'equazione differenziale è lineare, possiamo "sovrapporne" le soluzioni ed ottenere ancora una soluzione (detto in modo matematicamente più fine, "la combinazione

lineare di due soluzioni di un'equazione differenziale lineare, è ancora una soluzione della stessa equazione").

Quindi la strategia procede in 3 passi:

passo 1 Troviamo una soluzione dell'equazione differenziale che risolva la condizione all'infinito;

passo 2 Troviamo le soluzioni dell'equazione differenziale che si annullano all'infinito (e che sono periodiche in ϑ);

passo 3 All'interno di questa classe, selezioniamo quella/e che, sommate alla soluzione del passo 1, soddisfano la condizione per $r = a$.

Per risolvere il passo 1, basta osservare che la funzione

$$F(r, \vartheta) := v_0 r \cos \vartheta \quad (3.22)$$

è armonica e soddisfa la condizione al contorno all'infinito per (3.21).

Il secondo passo è più sottile. Possiamo osservare che, moltiplicando per r^2 l'equazione

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} = 0$$

otteniamo

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} \quad (3.23)$$

della quale possiamo cercare soluzioni attraverso un *ansatz* di separazione "moltiplicativa" delle variabili, cioè attraverso la ricerca di soluzioni $\psi(r, \vartheta)$ di (3.23) della forma "fattorizzata"

$$\psi(r, \vartheta) = f(r) g(\vartheta), \quad \text{con} \quad (3.24)$$

Sostituendo (3.24) in (3.23) e dividendo per $f(r)g(\vartheta)$ otteniamo (qui l'apice ' indica la derivazione rispetto alla opportuna variabile)

$$r^2 \frac{f''}{f} + r \frac{f'}{f} = - \frac{g''}{g}. \quad (3.25)$$

Dato che il lato sinistro di questa equazione dipende solo da r e quello destro solo da ϑ ne consegue che essi devono essere uguali alla stessa costante e dunque possiamo spezzare (3.25) nel sistema

$$\begin{cases} r^2 \frac{f''}{f} + r \frac{f'}{f} = A^2 \\ \frac{g''}{g} = -A^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 f'' + r f' - A^2 f = 0 \\ g'' = -A^2 g, \end{cases} \quad (3.26)$$

dove, denotando la costante con A^2 , $A \in \mathbb{R}$ abbiamo già implementato la condizione di realtà sulla g ; dato che la soluzione genrale della seconda delle (3.26) è

$$g(\vartheta) = B \cos(A\vartheta + \vartheta_0)$$

imponendo la condizione di periodicità $g(\vartheta+2\pi) = g(\vartheta)$ otteniamo che $A \in \mathbb{Z}$, ovvero la famiglia di soluzioni

$$g_n(\vartheta) = B_n \cos(n\vartheta + \vartheta_{0,n}). \quad (3.27)$$

Consideriamo ora la prima delle (3.26) che diventa

$$r^2 f'' + r f' - n^2 f = 0$$

Tramite la sostituzione di Eulero $r = e^z$ che dà

$$dr = r dz \Leftrightarrow r \frac{d}{dr} = \frac{d}{dz},$$

denotando con \cdot la derivazione rispetto alla z , quest'ultima diventa $\ddot{f} - n^2 f = 0$, da cui

$$f(z) = \alpha e^{nz} + \beta e^{-nz} \Leftrightarrow f(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}.$$

La condizione di annullamento all'infinito dice che si deve scegliere $\alpha = 0$ se $n \geq 0$ e $\beta = 0$ se $n \leq 0$, da cui possiamo dire che le soluzioni che soddisfano le condizioni di annullamento all'infinito sono

$$f_n(r) = \frac{a_n}{r^{|n|}}, \quad n = \pm 1, \pm 2 \dots \text{ (ovvero } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{)}. \quad (3.28)$$

Dunque possiamo concluderne che per ogni n intero non nullo la funzione

$$\psi_n(r, \vartheta) = g_n(\vartheta) f_n(r) = \frac{1}{r^{|n|}} (\alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \sin(n\vartheta)),$$

è una funzione armonica sul piano, che si annulla all'infinito. Osservato che n può essere, senza perdere in generalità, scelto tra gli interi positivi, data la linearità delle equazioni in gioco, e data la soluzione del passo 1, possiamo dunque concludere che ogni polinomio di Fourier della forma

$$\psi(r, \vartheta) = v_0 r \cos(\vartheta) + \sum_{n=1}^N \frac{1}{r^n} (\alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \sin(n\vartheta)) \quad (3.29)$$

è armonico (cioè, dato che siamo in coordinate polari, soddisfa l'equazione (3.23)), e le condizioni all'infinito.

Ora non ci resta che implementare il passo 3, ovvero imporre l'annullamento della derivata normale di $\psi(r, \vartheta)$ per $r = a$. Si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0 \cos(\vartheta) - \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \frac{\cos(n\vartheta)}{r^{n+1}} + \beta_n \frac{\sin(n\vartheta)}{r^{n+1}} \right) \Big|_{r=a} \\ &= v_0 \cos(\vartheta) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \frac{\cos(n\vartheta)}{a^{n+1}} + \beta_n \frac{\sin(n\vartheta)}{a^{n+1}}. \end{aligned}$$

Dal principio di identità dei polinomi trigonometrici otteniamo

$$\beta_n = 0 \, \forall n, \, \alpha_n = 0, n > 1, \, v_0 - \frac{\alpha_1}{a^2} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = a^2 v_0.$$

Dunque la soluzione al nostro problema è data dal potenziale

$$\psi(r, \vartheta) = v_0 \cos(\vartheta) \left(r + \frac{a^2}{r} \right).$$

3.4 Equazioni di Helmholtz per un fluido incompressibile

Riconsideriamo le equazioni (3.9), ovvero

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(|\mathbf{v}|^2) = -\nabla \left(\frac{p}{\varrho_0} + U \right) \end{cases} \quad (3.30)$$

Queste equazioni definiscono in modo completo la dinamica di un fluido incompressibile (sono quattro equazioni per le quattro incognite \mathbf{v} e p , dato che U è supposto noto a priori così come ϱ_0). Se prendiamo il rotore della seconda di queste equazioni, e ricordiamo che avevamo definito $\boldsymbol{\omega} := \nabla \wedge \mathbf{v}$ otteniamo che questa si trasforma (permutando il rotore on la derivata rispetto al tempo) nella equazione (di Helmholtz)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) = 0. \quad (3.31)$$

Considerando dunque i vettori \mathbf{v} e $\boldsymbol{\omega}$, ne ricaviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) = 0 \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v} (\Rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0) \end{cases} \quad (3.32)$$

Questo sistema è sufficiente a determinare $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ una volta nota la condizione iniziale $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$ – sotto l’ipotesi che \mathbf{v} tenda ad un vettore costante per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Questo risultato segue dal ”teorema di decomposizione di Hodge”, che non dimostriamo, ma che dice sostanzialmente che la divergenza ed il rotore di un campo vettoriale (in \mathbb{R}^3 – o meglio, in un dominio contraibile di \mathbb{R}^3) determinano il campo vettoriale in questione a meno di un campo costante (che è dunque determinato in base alla condizione all’infinito)

È possibile ed istruttivo intuire perchè ciò sia vero mediante le seguenti considerazioni euristiche.

Data la condizione al tempo $t = 0$, ovvero $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$, possiamo calcolare $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0)$; usando questa come condizione iniziale nella seconda delle (3.32) possiamo ottenenere (si pensi al metodo di Eulero per la risoluzione approssimata delle equazioni differenziali) il rotore di \mathbf{v} al tempo Δt . Ma allora, utilizzando il teorema di decomposizione di Hodge, dato che $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \forall t$, possiamo ottenere il campo della velocità al tempo Δt , ovvero $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \Delta t)$. A questo punto possiamo ricominciare (si noti che basta avere la condizione iniziale su $\boldsymbol{\omega}$, ovvero conoscere $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0)$ per sviluppare l’algoritmo). Si può anche osservare che abbiamo implicitamente usato questa procedura nella sezione precedente 3.3.

Terminiamo con la seguente osservazione. Un caso particolare di condizione iniziale sulla vorticità è $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$; la seconda delle (3.32) dice che $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \forall t$ è una soluzione delle equazioni, e dunque, per la decomposizione di Hodge, essa è *la* soluzione del problema al valore iniziale $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$. In (altre) parole, un fluido perfetto che sia, al tempo iniziale t_0 irrotazionale, resta irrotazionale per tutti i tempi. Questa proprietà, che è in contrasto con la nostra esperienza (pensate allo svuotamento di un lavandino....) dice che in realtà è necessario, per avere una descrizione più efficace della meccanica dei fluidi, considerare fluidi non perfetti, anche nel caso di fluidi che, intuitivamente, vorremmo chiamare non viscosi come l’acqua.

4 Fluidi viscosi "Newtoniani"

Consideriamo il tensore degli sforzi introdotto nella Sezione 2, $\mathbb{S} = S_{ij}e^i \otimes e^j$, e scomponiamolo nella sua parte di pressione (presente anche nell'idrostatica) e in una sua parte che dipenderà dalla velocità.

$$S_{ij} = p(x, t)\delta_{ij} + \tilde{S}_{ij}, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^3 \tilde{S}_{ii} = 0. \quad (4.1)$$

Abbiamo visto che S_{ij} (e dunque anche \tilde{S}_{ij}) è un tensore simmetrico, ovvero $S_{ij} = S_{ji}$.

Sperimentalmente si osserva che lo sforzo di taglio necessario a mantenere in moto una lastra che scorre su un liquido è proporzionale alla differenza della velocità della lastra e della velocità al fondo dell'apparato sperimentale. Questo significa che lo sforzo di taglio superficiale sarà una funzione del *gradiente*⁶ di velocità, ovvero gli elementi di \tilde{S}_{ij} dipenderanno dalle derivate $\partial_i v_k$.

L'ipotesi costitutiva più ragionevole che si possa fare, compatibile con il fatto sperimentale ricordato sopra, è che \tilde{S}_{ij} dipenda linearmente dal gradiente di velocità. Questa ipotesi è talvolta compendiata in letteratura con il termine di *Fluido Newtoniano*. Inoltre, supponendo che il fluido sia isotropo, non è difficile verificare che la più generale forma di \tilde{S}_{ij} compatibile con le nostre ipotesi è la seguente

$$\tilde{S}_{ij} = -\eta(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{1}{3}\nabla \cdot \mathbf{v})\lambda \cdot \mathbf{v}\delta_{ij}. \quad (4.2)$$

Il coefficiente η è detto primo coefficiente di viscosità o coefficiente di viscosità di *em shear*, e λ coefficiente di viscosità di *bulk* o volume o compressione⁷. Il segno che compare sarà discusso più avanti.

Osserviamo che questa denominazione è dettata dal fatto che, scrivendo

$$-\tilde{S}_{ij} = \eta\sigma_{ij} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ij}$$

si osserva che $\text{Tr}(\sigma_{ij}) = 0$, e che il termine $\lambda\nabla \cdot \mathbf{v}\delta_{ij}$ è un termine che ha la stessa "geometria" del termine di pressione. In particolare, talvolta λ è detto coefficiente di viscosità di volume (*bulk*), mentre η è anche detto coefficiente di viscosità di *shear*.

⁶Più propriamente, dello jacobiano della velocità.....

⁷Nel Feynman, si definisce invece il secondo coefficiente di viscosità come $\eta' = \lambda - \frac{1}{3}\eta$

4.1 Fluidi viscosi e l'equazione di Navier-Stokes.

Sostituiamo ora l'espressione (4.2) nella equazione di Eulero, e otteniamo (supponendo che la densità di forza volumetrica – per unità di massa – sia derivabile dal potenziale φ)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - \nabla \varphi + \frac{\partial}{\partial x^k} (\eta (\partial_k v_i + \partial_i v_k) + \eta' (\partial_j v_j) \delta_{ij}) \mathbf{e}_i.$$

Possiamo supporre che i coefficienti di viscosità siano costanti; dunque la equazione qui sopra diventa

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla p - \nabla \varphi + \eta (\Delta \mathbf{v} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})) + \eta' \nabla ((\nabla \cdot \mathbf{v})), \quad (4.3)$$

dove abbiamo osservato che $\left(\sum_k \left(\frac{\partial x^k}{\partial} \partial_k v_i + \partial_i v_k \right) \right) = \Delta v_i - \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{v})$ e sommato rispetto all'indice i . Questa è l'equazione di Eulero per un fluido viscoso Newtoniano isotropo.

Una forma più compatta di questa equazione si ottiene considerando il caso di un fluido incomprimibile ($\varrho = \text{costante} = \varrho_0$ che dà $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$); infatti, con questa ipotesi due dei termini su lato destro (ed in particolare - come è naturale - quello contenente la viscosità di volume) spariscono, e ne otteniamo la cosiddetta equazioni di Navier-Stokes, ovvero

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\varrho_0} + \varphi \right) + \eta (\Delta \mathbf{v}). \quad (4.4)$$

Analogamente al caso del fluido perfetto possiamo considerare l'equazione di Navier Stokes per la vorticità $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$. Infatti, basta osservare che

$$\nabla \wedge (\Delta \mathbf{X}) = \Delta (\nabla \wedge \mathbf{X})$$

per ogni campo vettoriale \mathbf{X} ⁸ sufficientemente regolare, e utilizzare ancora l'identità

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \underbrace{(\nabla \wedge \mathbf{v})}_{=\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (|\mathbf{v}|^2)$$

per ottenere l'equazione in cui non compaiono p e φ ,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) = \eta \Delta \boldsymbol{\omega}. \quad (4.5)$$

⁸La verifica di ciò è un calcolo immediato.

Come nel caso dell'acqua "secca", possiamo osservare che questa equazione, con la condizione iniziale $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x})$ - supplementata da opportune condizioni all'infinito, si può usare per integrare con il metodo di Eulero le equazioni per la velocità (basta usare il fatto che da $\boldsymbol{\omega}_0 = \nabla \wedge \mathbf{v}_0$ e da $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ possiamo ottenere \mathbf{v}_0 , e dunque $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \delta t)$ e così via. Ora, se è vero che $\boldsymbol{\omega} = 0$ è ancora una soluzione accettabile del problema, notiamo che il termine viscoso dà luogo ad un fenomeno di diffusione della vorticità; infatti, nel limite di scaling $\mathbf{v} \rightarrow \epsilon \mathbf{v}$, il termine dominante di (4.5) dà luogo all'equazione del calore

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + o(\epsilon) = \eta \Delta \boldsymbol{\omega}.$$

4.2 Scaling e il numero di Reynolds

Consideriamo l'equazione di Navier Stokes per la vorticità, ovvero

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}) = \frac{\eta}{\varrho} \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (4.6)$$

da supplementarsi con $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{v}$, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$; supponiamo di voler studiare il problema, esaminato nel caso dell'aria secca, del flusso piano, intorno ad un cilindro di raggio a , con velocità all'infinito data da $V_\infty \mathbf{e}_1$.

Sperimentalmente, si osserva che la velocità al bordo del cilindro è nulla, ovvero

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{per } x^2 + y^2 = a^2.$$

Le quantità fisiche che entrano nel problema (4.6) sono dunque quattro, $(\varrho, \eta, a, V_\infty)$. Se misuriamo le distanze in unità di raggio del cilindro, passeremo a nuove variabili (x', y', z') legate alle "originarie" da

$$x = x' a, \quad y = y' a, \quad z = z' a. \quad (4.7)$$

Si noti che le variabili primarie non hanno dimensione! Se ora utilizziamo, come scala (misura) dei tempi, la quantità $t' = t \frac{V_\infty}{a}$, vediamo che la "velocità" $v' = \frac{dx'}{dt'}$ è legata alla velocità fisica v da

$$v' = \frac{dx}{a} \frac{1}{dt} \frac{a}{V_\infty} \Rightarrow \mathbf{v} = v' V_\infty,$$

dove abbiamo usato (4.7) nella forma

$$dx = a dx' \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x'}$$

Da questa legge di scala abbiamo, sostituendo in (4.6), la seguente relazione, osservato che $\boldsymbol{\omega} = \frac{V_\infty}{a}\boldsymbol{\omega}'$ e $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{V}{a}\frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial t'}$,

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt} + \nabla \wedge (\boldsymbol{\omega}' \wedge \mathbf{v}') = \frac{\eta}{\varrho V_\infty a} \Delta \boldsymbol{\omega}' = \frac{1}{Re} \Delta \boldsymbol{\omega}'. \quad (4.8)$$

Il numero $Re = \frac{\varrho V_\infty a}{\eta}$ è detto numero di Reynolds. Queste proprietà di scala permettono di studiare modellisticamente i problemi, per esempio in una galleria del vento. Infatti, due condizioni fisiche distinte, ma i cui numeri di Reynolds coincidono, daranno luogo alla stessa soluzione di (4.6).

5 Alcuni Esempi

5.1 Piccole oscillazioni di un gas perfetto

Consideriamo le equazioni di Eulero e di conservazione della massa per un fluido perfetto comprimibile, immerso

$$\begin{cases} \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \varrho \mathbf{f} \\ \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Denotiamo con un suffisso $_0$ le quantità all'equilibrio, e denotiamo le perturbazioni dall'equilibrio con un $'$; ovvero, scriveremo

$$p = p_0 + \epsilon p', \quad \varrho = \varrho_0 + \epsilon \varrho', \quad (5.2)$$

dove ϵ è un parametro piccolo. Contestualmente supporremo che le perturbazioni siano localizzate, ovvero che

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} p' = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \varrho' = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}'\| = 0. \quad (5.3)$$

Le condizioni all'equilibrio sono

$$\mathbf{f}_0 = \varrho_0 \nabla p_0, \quad \frac{\partial \varrho_0}{\partial t} = 0, \quad \nabla \varrho_0 = 0. \quad (5.4)$$

Sviluppiamo in potenze del parametro ϵ l'equazione di continuità. Sostituendo abbiamo

$$\frac{\partial \varrho_0}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \epsilon \nabla \cdot (\varrho_0 \mathbf{v}') + \epsilon^2 \nabla \cdot (\varrho' \mathbf{v}') = 0.$$

che si riduce, tenuto conto della seconda e terza condizione di equilibrio (5.4), al primo ordine significativo in ϵ a

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad (5.5)$$

In maniera analoga, operando sull'equazione di Eulero otteniamo

$$\epsilon(\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t}) = -\nabla(p_0) + \varrho_0 \mathbf{f}_0 - \epsilon(\varrho_0 \nabla p' - \varrho_0 \mathbf{f}' - \varrho' \mathbf{f}_0) \quad (5.6)$$

Supponiamo che la densità di forza \mathbf{f} sia semplicemente quella gravitazionale⁹ $\mathbf{f} = -g\hat{k} = -\nabla(gz)$ (e dunque $\mathbf{f}' = 0$) ne otteniamo, tenuto conto della prima delle (5.4),

$$\varrho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla(p') = -\varrho' g \hat{k}$$

Osserviamo dunque che, nel limite di $\epsilon \rightarrow 0$, considerando (5.5) e l'equazione qui sopra, le piccole oscillazioni di un fluido comprimibile si linearizzano¹⁰ nel sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_0} \nabla p' = -\frac{\varrho'}{\varrho_0} g \hat{k}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Supponiamo ora che il termine sul lato destro della equazione vettoriale qui sopra sia trascurabile, e dunque consideriamo, in luogo di questo sistema, il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_0} \nabla p' = 0. \end{cases} \quad (5.8)$$

Il significato di questa "semplificazione" verrà discusso più oltre.

Se prendiamo la derivata parziale rispetto al tempo della prima equazione e la divergenza della seconda, possiamo eliminare \mathbf{v}' da una delle equazioni ed arrivare (moltiplicando per ϱ_0) a

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \\ -\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} + \Delta p' = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

⁹ \hat{k} è, *ça va sans dire*, il versore dell'asse verticale.

¹⁰Cioè diventano il sistema di equazioni lineari

Consideriamo ora la condizione di bariotropicità; Ricordiamo che un trasformazione (o una equazione di stato) viene detta bariotropica se è possibile esprimere la densità in funzione della pressione e viceversa. In particolare, da $p = p(\varrho)$ otteniamo, per le "piccole variazioni",

$$p' = \left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=\varrho_0} \varrho', \quad (5.10)$$

e dunque scriviamo $p' = w_0^2 \varrho'$ (è ovvio che la pressione sia una funzione crescente della densità); per comodità, assumeremo che w_0 sia una costante positiva. Tenuto conto di questa relazione, possiamo scrivere (5.9) come un sistema chiuso di equazioni (nelle variabili (ϱ', \mathbf{v}'))

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \\ -\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} + w_0^2 \Delta \varrho' = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Notiamo che in questo sistema la velocità \mathbf{v}' compare in modo tale da essere determinata da ϱ' : ovvero trovata una (qualsiasi) soluzione della equazione per la densità ϱ' , possiamo usare la prima per ricavare la divergenza di \mathbf{v} e dunque - (possiamo supporre che $\boldsymbol{\omega}$ sia nulla, dato che il fluido è perfetto) anche \mathbf{v}' . Dunque consideriamo la seconda delle equazioni (5.11), che scriviamo nella forma

$$\frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} - \Delta \varrho' = 0 \quad (5.12)$$

nella quale riconosciamo l'equazione di onde che viaggiano con velocità pari a w_0 ; in particolare avremo soluzioni della forma

$$\varrho'(\mathbf{x}, t) = f_+(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega_k t) + f_-(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega_k t)$$

per ogni "vettore d'onda" $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, con

$$\omega_k = w_0 k \quad (\Leftrightarrow \frac{d\omega_k}{dk} = w_0(\text{costante})).$$

Il significato di questa relazione - e il perché sia stata scritta in questo modo - verrà discusso più oltre. Ora vediamo come determinare la velocità w_0 , utilizzando la condizione di isoentropicità, che si scrive come la legge di potenza

$$p = \varrho^\gamma \quad \text{con } \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (5.13)$$

cioè dove γ è il rapporto dei calori specifici a (rispettivamente) pressione e a volume costante. Da questa otteniamo

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

Osservando che la legge dei gas perfetti $pV = nRT$ si scrive $pV = \frac{M}{M_0}RT$, con M massa totale e M_0 massa molare (cioè di una mole), e dunque, dividendo per V (tutte queste operazioni sono fatte sullo stato di equilibrio, con, e.g. $\rho_0 = \text{cost} = \frac{M}{V}$, e "a livello del mare"), si ha che la forma equivalente della legge dei gas perfetti è

$$p = \bar{R}\rho T, \quad \bar{R} = M_0 R.$$

Dunque, dalla equazione più sopra,

$$w_0^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma \bar{R}T,$$

e dunque si ha, per la velocità delle "onde di densità" (o, per la (5.13), di pressione) descritte dalla (5.12)

$$w_0 = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \bar{R}T}.$$

Osserviamo che per l'aria, nel sistema MKS, $\bar{R} \simeq 287 \frac{m^2}{K \text{ sec}^2}$, $\frac{c_p}{c_v} \simeq 1.4$, e dunque, ad una temperatura di $293K$ otteniamo

$$w_0 = \sqrt{1.18 \cdot 10^5} \frac{m}{\text{sec}} \simeq 343.6 \frac{m}{\text{sec}},$$

cioè proprio la velocità del suono.

Riconsideriamo ora la derivazione dell'equazione (5.8), e, in particolare, discutiamo sotto quali condizioni il trascurare il termine sul lato destro della equazione

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' = -\frac{\rho'}{\rho_0} g \hat{k} \quad (5.14)$$

sia ragionevole. Procedendo come prima, ovvero:

1) derivando rispetto a t l'equazione di continuità "linearizzata"

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho' \nabla \cdot (\mathbf{v}') = 0,$$

2) prendendo la divergenza di quest'ultima equazione, e

3) sostituendo la relazione (5.10) $p' = w_0^2 \varrho'$ e dividendo per w_0^2 , si arriva all'equazione

$$\frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} - \Delta \rho' = -\frac{g}{w_0^2} \frac{\partial(\varrho')}{\partial z}. \quad (5.15)$$

Operiamo una trasformazione di scala, come definita nella Sezione 4.2; sia L la scala delle misure spaziali, e definiamo le grandezze adimensionali

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}. \quad (5.16)$$

Avendo fissato la scala delle lunghezze, ed avendo una scala naturale delle velocità $w_0 \simeq 3.43 \cdot 10^2 \frac{m}{sec}$, abbiamo anche una scala naturale dei tempi; ovvero possiamo definire il "tempo adimensionale"

$$\tilde{t} = \frac{w_0}{L} t \quad (5.17)$$

Dato che

$$x = L\tilde{x} \Rightarrow dx = Ld\tilde{x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}},$$

(con le corrispondenti relazioni per y e z), e

$$t = \frac{L}{w_0} \tilde{t} \Rightarrow dt = \frac{L}{w_0} d\tilde{t} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{w_0}{L} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}}$$

sostituendo e semplificando in (5.15) otteniamo la equazione

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial \tilde{t}^2} - \tilde{\Delta} \varrho' = -\frac{L g}{w_0} \frac{\partial \varrho'}{\partial \tilde{z}}. \quad (5.18)$$

Dunque il termine a sinistra di questa equazione, che è stato trascurato in prima istanza, diventerà di ordine 1 quando

$$\frac{L g}{w_0^2} \simeq 1 \Leftrightarrow L \simeq \frac{w_0^2}{g} \simeq \frac{3.43^2 \cdot 10^4}{10} \simeq 10^4 m,$$

il che giustifica il fatto di averlo trascurato in prima istanza.

Nota. A lezione si era proceduto nel seguente modo, per derivare l'equazione delle onde. Si era considerato il sistema (5.8) con la condizione di si bariotropicità (5.10), ovvero

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + \frac{1}{\varrho_0} \nabla p' = 0. \\ p' = w_0^2 \varrho', \quad \text{dove } w_0 = \left. \frac{\partial p}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=\varrho_0}. \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Sostituendo la terza nella prima si ha

$$-\frac{1}{w_0^2} \frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0. \quad (5.20)$$

Dato che possiamo supporre $\boldsymbol{\omega} = 0$, sarà $\mathbf{v}' = \nabla \varphi$; dunque, la seconda delle (5.19) diventa

$$\varrho_0 \frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \nabla p' = 0, \quad (5.21)$$

e dunque, ricordando che ϱ_0 è costante sia rispetto al tempo che alle variabili spaziali, otteniamo (permutando derivate temporali e spaziali)

$$\nabla(p' + \varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = 0. \quad (5.22)$$

Le condizioni di annullamento all'infinito permettono di arrivare a $p' = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Sostituendo questa relazione (insieme alla $\mathbf{v}' = \nabla \varphi$) in (5.20) si ottiene l'equazione

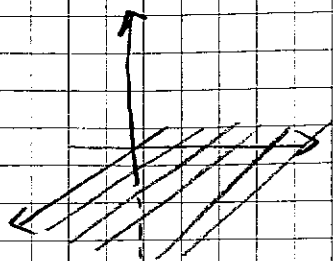
$$\Delta \varphi - \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

dunque l'equazione delle onde, questa volta scritta per il potenziale φ della velocità \mathbf{v}' . In questo approccio, data una soluzione $\bar{\varphi}$ di questa equazione, si può risalire a ϱ' e/o p' utilizzando la terza delle (5.19) e la relazione $p' = -\varrho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

5.2 Onde lineari di gravità

Per ora è scritto a mano e comincia nella pagina seguente.....

Piccole oscillazioni di un fluido perfetto incompressibile
soggetto alla forza di gravità (come in acqua).



Consideriamo un fluido perfetto incompressibile.

All'equilibrio si ha

$$\vec{v} = 0, \quad \rho = \text{costante} \quad \text{e} \quad p = p_0 - \rho g z.$$

Vogliamo studiare piccole perturbazioni, con scala
di lunghezza spaziale piccola.

Supponiamo dunque che, nelle equazioni di Eulero (3.7)
si possano trascurare i termini quadratici in \vec{v} .

Ovvero considereremo le equazioni linearizzate

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{eq. di continuità} \\ \text{per fluidi incompressibili}) \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(gz) \quad (\text{Eulero linearizzato} \\ \text{in } \vec{v}^2 = 0) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Nella seconda delle (2.1) abbiamo già \vec{v} assente

$$U = gz$$

per il potenziale gravitazionale.
(1)

Per la conservazione della vorticità, possiamo supporre che la velocità sia un campo potenziale, ovvero

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \varphi$$

Le eq. (a1) diventano, per φ :

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \vec{\nabla} \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \end{cases} \quad (a2)$$

e dunque $\left(\frac{\partial \vec{\nabla}}{\partial t} = \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \right)$

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \vec{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz \right) = 0 \end{cases}$$

e dunque

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = \frac{P_0}{\rho} \end{cases} \quad (a3)$$

dove $P_0 = P|_{z=0}$

Ci proponiamo di trovare classi di soluzioni a queste equazioni che soddisfino opportune condizioni al "contorno", che ora precisiamo.

②

Il concetto principale è quello di interfaccia tra il fluido (che, d'ora in avanti basteremo "acqua") e l'esterno ("aria").

Chiamiamo $z(x, y, t)$ la funzione che descrive la deformazione della superficie (piana) di equilibrio.

In altre parole, la "piccola" oscillazione sarà descritta dall'equazione

$$z = z(x, y, t) \quad (94)$$

Se L_0 è una scala di lunghezze (sia, poi, la lunghezza d'onda), richiediamo che

$$|z(x, y, t)| \ll L_0$$

È anche ragionevole supporre che $\nabla \phi|_{z=z(x, y, t)} = \nabla \phi|_{z=0}$ (ovvero, in $z = z(x, y, t)$ (all'interfaccia) si ossi, dalla seconda delle (93)

$$(95) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + g z \right) \Big|_{z=z(x, y, t)} = 0 \iff \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=z(x, y, t)} + g z(x, y, t) = 0$$

Derivando parzialmente questa relazione rispetto a t

si ottiene

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{z=\zeta(x,y,t)} + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (06)$$

È importante considerare la velocità all'interfaccia.

Supponiamo che $(x(t), y(t), z(t))$ descriva una

"particella di fluido" all'interfaccia. Allora,

per definizione stessa di interfaccia, si dovrà

avere

$$z(t) = \zeta(x(t), y(t), t) \quad (\text{per } t \in (a, b))$$

$$\Rightarrow \underset{\parallel}{\dot{z}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \underset{\parallel}{\dot{x}} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \underset{\parallel}{\dot{y}} \quad (07)$$

$v_z \qquad \qquad \qquad v_x \qquad \qquad \qquad v_y$

Ma, dato che consideriamo $|\zeta| \ll L_0$, possiamo

trascurare gli ultimi due termini di (07),

ed arrivare ad

$$(08) \quad \left. v_z \right|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0$$

Sempre dato che $|\zeta| \ll L_0$, possiamo

sostituire $z=3$ con $z=0$ nella equazione (9),
e dunque scrivere la condizione all'interfaccia
come

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = 0 \quad (9)$$

(dove abbiamo usato la (6)).

In definitiva abbiamo il seguente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi = 0 \quad \text{in } z < 0 \\ g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{z=0} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow -\infty, \end{array} \right. \quad (10)$$

dove l'ultima condizione dice semplicemente che
la velocità verticale deve andare a zero per $z \rightarrow -\infty$
(cioè sul "fondo del mare").

Osservando che (10) è un sistema di equazioni
differenziali (più condizioni sulle derivate -
dette condizioni di tipo Neumann - al bordo).

Occupiamoci dell'equazione di Laplace con la condizione
a $z = -\infty$, ovvero

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{per } z \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (Q11)$$

Cerchiamo soluzioni moltiplicativamente separate,
ovvero facciamo l'Ansatz

$$\varphi(x, y, z) = Z(z) \cdot \psi(x, y)$$

Sostituiamo in $\Delta \varphi = 0$ e dividendo per φ si ottiene

$$\frac{\Delta_{(x,y)} \psi(x, y, z)}{\psi(x, y, z)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \quad \left(\Delta_{(x,y)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

da cui

$$\frac{\Delta_{(x,y)} \psi(x, y, z)}{\psi(x, y, z)} = - \frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad \text{e sempre deve } \exists \kappa \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \Delta_{(x,y)} \psi(x, y, z) = -\kappa \psi(x, y, z) \\ Z''(z) = \kappa Z(z) \end{cases} \quad (Q12)$$

Come sappiamo, la soluzione generale ^(reale) della equazione
in $Z(z)$ è

$$\zeta(z) = a_k e^{\sqrt{k}z} + b_k e^{-\sqrt{k}z} + \text{comp. comp.}$$

la condizione al bordo dà

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ per } z \rightarrow -\infty \quad \text{e dunque}$$

$$k = \alpha^2 \quad (\alpha \text{ reale}) \quad \text{e} \quad \bullet$$

$$\zeta(z) = a_\alpha e^{\alpha z} \quad \bullet$$

Facciamo ora l'ipotesi semplificativa che

$\psi(x, y, t)$ non dipende⁽¹⁾ da y . Allora la

prima delle (9.10) diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) = -\alpha^2 \psi(x, t)$$

Posto $\psi(x, t) = \xi(x) \cdot T(t)$ si ha

$$\xi''(x) = -\alpha^2 \xi(x) \Rightarrow$$

$$\xi(x) = A_\alpha \cos(\alpha x - \theta_\alpha) \quad \text{Cambiando}$$

le costanti moltiplicative a_α e A_α in α

abbiamo a questo punto che (9.11) implica

(1) In realtà, l'assunto che ψ dipende anche da y non complica molto di più la cose. (7)

che $\forall x \in \mathbb{R}$ e ogni salto di costanti
(eventualmente dipendenti da x) α_x, θ_x
la funzione

$$\varphi_x(x, z, t) = \alpha_x e^{zx} \cos(x - \theta_x) T(t) \quad (212)$$

è una soluzione di (211).

La dipendenza da t di φ_x viene fissata
dalla condizione al bordo $z = 0$, ovvero da (29)

$$-g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi(x, z, t) \Big|_{z=0}$$

Sostituendo (212) qui sopra otteniamo (ricambiando
 x con $x - \theta_x$) e notando che $e^0 = 1, \dots$)
l'equazione

$$-g x T(t) = \frac{d^2 T}{dt^2}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(t) = \beta_x^+ \cos(\omega t + \varphi_x^+) + \beta_x^- \cos(-\omega t + \varphi_x^-)$$

con $\omega = \sqrt{gk}$ Dunque riseparizzando i

termini abbiamo le soluzioni "elementari" al
nostro problema (equazione 210) date da
(8)

$$\begin{aligned}
 \varphi(x, z, t) &= \varphi_x^R(x, z, t) + \varphi_x^L(x, z, t) = \\
 &= \tilde{\alpha}_x^+ e^{xz} \cos(kx - \omega t + \tilde{\Theta}_x^+) + \\
 &\quad + \tilde{\alpha}_x^- e^{xz} \cos(kx + \omega t + \tilde{\Theta}_x^-) .
 \end{aligned} \tag{Q13}$$

L'interpretazione fisica è la seguente.

Dalla Q8 otteniamo che l'espressione dell'interfaccia β , nel punto che stiamo considerando è

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} \Rightarrow \text{da (Q13) otteniamo}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \beta}{\partial t}(x, t) &= k \tilde{\alpha}_x^+ \cos(kx - \omega t + \tilde{\Theta}_x^+) + \\
 &\quad k \tilde{\alpha}_x^- \cos(kx + \omega t + \tilde{\Theta}_x^-)
 \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
 \beta(x, t) &= \frac{x}{\omega} \tilde{\alpha}_x^+ \sin(kx - \omega t + \tilde{\Theta}_x^+) \\
 &\quad - \frac{x}{\omega} \tilde{\alpha}_x^- \sin(kx + \omega t + \tilde{\Theta}_x^-) . \\
 &= (\text{def}) = \beta_x^R(x, t) + \beta_x^L(x, t) .
 \end{aligned}$$

Osserviamo che la soluzione è data dalla sovrapposizione di perturbazioni ondulatorie, una delle quali ($\xi_x^R(x, t)$) viaggia verso destra ($\xi_x^L(x, t)$ verso sinistra).

Posto $t=0$, la lunghezza d'onda è

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k}, \text{ e la velocità di propagazione}^{(2)}$$

della cresta definita da $kx - \omega t + \theta_x^+ = 0$

$$\text{è } \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}.$$

di propagazione

È importante notare che la velocità delle onde in acqua dipende dalla lunghezza d'onda, a differenza del caso delle onde elettromagnetiche e delle onde sonore (trattate nel paragrafo precedente).

Problema: descrivere la legge che lega

numero d'onda k e frequenza nel caso di profondità pari a L_0 .

⁽²⁾ Sto considerando onde che viaggiano a destra.